

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 3 – Matemáticas discretas

Jueves 16 de noviembre de 2017 (tarde)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[50 puntos]**.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 11]

Mathilde reparte libros a cinco bibliotecas: A, B, C, D y E. Empieza el reparto en la biblioteca D y pasa una vez por cada una de las bibliotecas restantes antes de volver a la biblioteca D. Mathilde quiere que la distancia que recorre sea mínima.

El grafo ponderado H , que representa las distancias en kilómetros que hay entre las cinco bibliotecas, tiene la siguiente tabla.

	A	B	C	D	E
A	-	18	19	16	21
B	18	-	15	22	17
C	19	15	-	20	17
D	16	22	20	-	19
E	21	17	17	19	-

- (a) Dibuje el grafo ponderado H . [2]
- (b) Empezando en la biblioteca D utilice el algoritmo del vecino más próximo para hallar un límite superior para la mínima distancia que tiene que recorrer Mathilde. Indique claramente el orden en que se van seleccionando las aristas. [5]
- (c) Comenzando por eliminar la biblioteca C, utilice el algoritmo del vértice borrado para hallar un límite inferior para la mínima distancia que tiene que recorrer Mathilde. [4]

2. [Puntuación máxima: 10]

Considere la relación de recurrencia

$$u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}, u_0 = 0 \text{ y } u_1 = 1.$$

- (a) Halle una expresión para u_n en función de n . [6]
- (b) Para todo número primo $p > 3$, muestre que $p \mid u_{p-1}$. [4]

3. [Puntuación máxima: 11]

- (a) (i) Dibuje el grafo bipartito completo $\kappa_{3,3}$.
- (ii) Demuestre que $\kappa_{3,3}$ no es planario. [5]
- (b) Un grafo conexo G tiene v vértices. Demuestre, utilizando la relación de Euler, que un árbol generador de G tiene $v - 1$ aristas. [2]

Considere κ_n , un grafo completo con n vértices, $n \geq 2$. Sea T un árbol generador de κ_n fijo.

- (c) Si de todas las aristas de κ_n se elige al azar una arista E , muestre que la probabilidad de que E pertenezca a T es igual a $\frac{2}{n}$. [4]

4. [Puntuación máxima: 9]

Considere el sistema de congruencias lineales

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod{5} \\ x &\equiv 5 \pmod{8} \\ x &\equiv 1 \pmod{3}. \end{aligned}$$

- (a) Haciendo referencia a los números enteros 5, 8 y 3, indique por qué el teorema chino del resto garantiza que para este sistema de congruencias lineales haya una única solución módulo 120. [2]
- (b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle la solución general del sistema de congruencias lineales. [7]

5. [Puntuación máxima: 9]

- (a) Convierta el número decimal 1071 a base 12. [3]
- (b) Escriba el número decimal 1071 como producto de sus factores primos. [1]

El número decimal 1071 es igual a $a060$ en base b , donde $a > 0$.

- (c) (i) Utilizando la respuestas obtenidas en los apartados (a) y (b), demuestre que solo hay un valor de b posible e indique dicho valor.
- (ii) A partir de lo anterior, indique el valor de a . [5]